DURÉE : 4 heures

Les fonctions considérées ici sont supposées continues de la variable réelle et à valeurs complexes

-PARTIE A-

Si f *est une fonction de période* T > 0, *on note* $C_n^T(f)$ *la quantité égale à* $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-(2i\pi/T)nx}\, dx$ $(n \in \mathbb{Z})$.

1°)Soient f et g deux fonctions de période T > 0 telles que

$$\forall n\in\mathbb{Z} \quad C_n^T(f) = C_n^T(g)$$

Montrer que $\int_0^T |f(x)-g(x)|^2\, dx = 0$ et en déduire que f = g .

2°)Soit f une fonction de période T telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n^T(f)| < +\infty$

Déduire du 1°) que :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^T(f)\, e^{(2i\pi/T)nx}$$

On considère maintenant une fonction θ *telle qu'il existe* $\alpha > 0$ *pour lequel la fonction* $x \to |x|^{1+\alpha}\, |\theta(x)|$ *est bornée.*
Soit T>0 :

3°) Soit A>0. Montrer que pour $|n| > \frac{A}{T}$ et $|x| \le A$ on a

$$|x+nT| \ge |n|T-A$$

En déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la "série" $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(x+nT)$ est absolument convergente et définit une fonction continue de la variable x, de période T, qu'on notera θ_σ^T et qui s'appelle *la T-périodisée de* θ.

4°)On considère, pour $\nu\in\mathbb{R}$ fixé, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, e^{-i\nu x} dx$

a)Montrer que cette intégrale est absolument convergente. *On notera* $\hat{\theta}(\nu)$ *sa valeur.*

b)Montrer que la fonction $\hat{\theta}$ ainsi définie est continue.

($\hat{\theta}$ *s'appelle la transformée de Fourier de* θ)

c)Montrer que $C_n^T(\theta_\sigma^T) = \frac{1}{T}\hat{\theta}(2\pi n/T)$.

On suppose de plus qu'il existe $\beta > 0$ *tel que la fonction* $\nu \to |\nu|^{1+\beta}|\hat{\theta}(\nu)|$ *est bornée.*

5°)Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(x+nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}(2\pi n/T)\, e^{(2i\pi/T)nx}$

(Ce résultat est appelé la formule de Poisson)

6°)Si A est un réel >0, on note $N_T(A) = \{n\in\mathbb{Z},\ |2\pi n/T| \le A\}$.

a)Montrer que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n\in N_T(A)} \hat{\theta}(2\pi n/T)\, e^{(2i\pi/T)nx} = (1/2\pi)\int_{-A}^{A} \hat{\theta}(\nu)\, e^{i\nu x}\, d\nu$$

b)Montrer qu'il existe une constante c>0 telle que

$$\frac{1}{T} \sum_{n\notin N_T(A)} |\hat{\theta}(2\pi n/T)| \le c|A-2\pi|^{-\beta}\ ,\ \text{pour } T\ge 1 \text{ et } A > 2\pi$$

c)Déduire de a) et b) que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}(2\pi n/T)\, e^{(2i\pi/T)nx} = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\nu)\, e^{i\nu x}\, d\nu$$

d)Montrer que $\forall x\in\mathbb{R} \quad \theta(x) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\nu)\, d\nu$

(Cette formule s'appelle la formule de réciprocité de Fourier)

-Partie B-

Les fonctions θ *et* $\hat{\theta}$ *restent soumises aux hypothèses de la partie précédente. On suppose de plus que* $\theta(0) = 1$.

On considère une fonction f *continue et* 2π*-périodique. On pose* $C_n(f) = C_n^{2\pi}(f)$ $(n\in\mathbb{Z})$.

1°)Soit t >0.

a)Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|\,|\theta(nt)| < +\infty$

b)En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$ la "sèrie" $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)\, e^{inx}\, \theta(nt)$ dèfinit une fonction continue de la variable x, *que l'on notera* $\phi_t(x)$.

2°)*On pose, pour* $t>0$ *et* $u\in\mathbb{R}$, $K_t(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inu}\,\theta(nt)$.

En appliquant la formule de Poisson à la fonction ψ définie par $\psi(x) = e^{i(u/t)x}\theta(x)$ (u et t fixés), montrer que $K_t(u) = \frac{1}{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}((2\pi n-u)/t)$.

3°)Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\quad \phi_t(x) = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f(x-u)\,K_t(u)\,du$.

4°)En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}\quad \phi_t(x) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\nu t)\,\hat{\theta}(\nu)\,d\nu$.

5°)Montrer que $(1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\nu)\,d\nu = 1$

6°)En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{t\to 0+} \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)\,e^{inx}\,\theta(nt) = f(x)$$

et que cette convergence est uniforme en x.

-PARTIE C-

La fonction f est toujours une fonction continue 2π-périodique.

Application 1.

Montrer que $\lim_{r\to 1-} \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)\,e^{inx}\,r^{|n|} = f(x)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

(Procédé de sommation de Poisson)

Application 2.

On pose $\theta(x) = e^{-x^2}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = (\pi)^{1/2}$.

1°)Montrer que $\hat{\theta}$ vérifie une équation différentielle du premier ordre et en déduire $\hat{\theta}$.

2°)Montrer que $\lim_{t\to 0+} \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)\,e^{inx}\,e^{-n^2t^2} = f(x)$.

(Procédé de sommation de Weierstrass)